

Théorème 33
(p. 110)

Une famille $(v_1, \dots, v_p)$, $p \geq 2$, est lin. dépendante ssi au moins un des éléments de la famille est comb. lin. des autres éléments.

Preuve:

($\Rightarrow$) Supposons $(v_1, \dots, v_p)$ lin. dépendante.

Alors il existe une comb. lin.

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p = 0_V$ avec les α_i non tous nuls (i.e. $\alpha_j \neq 0$ pour au moins un j). On peut alors écrire v_j comme comb. lin. des $(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_p)$:

$$v_j = -\frac{\alpha_1}{\alpha_j} v_1 - \dots - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j} v_{j-1} - \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j} v_{j+1} - \dots - \frac{\alpha_p}{\alpha_j} v_p$$

($\Leftarrow$) Supposons qu'il existe $1 \leq j \leq p$ avec

$v_j = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{j-1} v_{j-1} + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \dots + \alpha_p v_p$
(i.e. v_j est comb. lin. des autres éléments)

Alors $1 \cdot v_j - (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{j-1} v_{j-1} + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \dots + \alpha_p v_p)$
 $= 0_V$

est une comb. linéaire non-triviale égale à 0_V (au moins un des coeff. est non nul).